[This question paper contains 7 printed pages]

Roll No.	

ASME-24BC-MAT-II

MATHEMATICS (PAPER-II)

गणित (पेपर-II)

Time Allowed : 3 Hours [Maximum Marks : 100

निर्धारित समय : 3 घंटे अधिकतम अंक : 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र संबंधी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions .

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

1. There are EIGHT questions printed in both. English and Hindi.
   इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिन्दी दोनों में छपे है ।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all either in English or Hindi.
   उम्मीदवार को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी में देने हैं ।
3. Question No. 1 is compulsory. Out of remaining seven questions, FOUR are to be attempted.
   प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है । शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question/ part are indicated against it.
   सभी प्रश्नों के समान अंक हैं । प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए है ।
5. Write answers in legible handwriting. Illustrate your answers with suitable sketches and diagrams, wherever considered necessary.
   सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखिए । जहां भी आवश्यक समझा जाए, वहाँ अपने उत्तरों को उपयुक्त रेखाचित्रों और आरेखों के साथ स्पष्ट कीजिए ।
6. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
   प्रश्न के भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए ।
7. Attempts of the questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
   प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । आंशिक रुप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो । खाली छोड़ें गए कोई भी पृष्ट अथवा पृष्ठ के भाग को पर्णतः काट दीजिए ।
8. Re-evaluation/ re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
   उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुन: जाँच की अनुमति नहीं है ।

1. (a) If the sequences $< a_n > and < b_n >$ converge to finite limit a and b, respectively, then show that 05

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots \ldots \ldots .. + a_n b_1}{n} = ab$$

यदि अनुक्रम $< a_n >$ तथा $< b_n >$ निश्चित सीमा a तथा b, पर क्रमशः अभिसरित होते है, तब सिद्ध करो कि

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots \ldots \ldots .. + a_n b_1}{n} = ab$$

(b) Evaluate contour integral 05

$$\oint_C \frac{e^{3z}}{(z-log2)^4} dz,$$

Where C is the square with the vertices at $\pm 1, \pm i$.

कन्टूर समाकल $\oint_C \frac{e^{3z}}{(z-log2)^4} dz,$ का मान ज्ञात करो जहां C एक वर्ग है जिसके शीर्ष $\pm 1, \quad \pm i$ पर है।

(c) Find the Laplace transform of $\frac{1}{t}\int_0^t e^t \sin t dt$. 05

$\frac{1}{t}\int_0^t e^t \sin t dt$ का लाप्लस रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(d) Show that the Newton-Raphson process has a quadratic convergence. 05

सिद्ध करो कि न्यूटन राप्सन विधि का द्विघातीय अभिसरण है।

2. (a) Let G be a group. Let Aut G denote the set of all automorphism of G and A(G) be the group of all permutations of G. Show that Aut G is a subgroup of A(G). 10

माना G एक समुह है। माना Aut G सभी औटोमोरफिज़्म का समुच्चय को निरूपित करता है तथा A(G), G के सभी क्रमचयों का समूह है। तब सिद्ध करो कि Aut G , A(G) का एक उपसमूह है।

(b) Let R [a, b] be a set of all Riemann integrable functions on the interval [a, b]. If $f: [a, b] \to R$ is monotone function on [a, b], then show that $f \in R[a, b]$. 10

माना R[a, b], अंतराल [a, b] पर सभी रिमान समाकलनीय फलनों का एक समुच्चय है। यदि $f: [a, b] \to R$, $[a, b]$ पर मोनोटोन फलन है, तब सिद्ध करो कि $f \in R[a, b]$.

3 (a) If $< S_n >$ is a sequence of positive real numbers such that $S_n = \frac{1}{2}(S_{n-1} + S_{n-2})$ for all n>2, then show that $< S_n >$ converges and find $\lim_{n\to\infty} S_n$. 10

यदि $< S_n >$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम इस प्रकार है कि $S_n = \frac{1}{2}(S_{n-1} + S_{n-2})$ जहां n>2, तब सिद्ध करो $< S_n >$ अभिसरित होता है तथा $\lim_{n\to\infty} S_n$ ज्ञात करो।

(b) Let R_∞ be the extended set of real numbers. The function d defined by $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ for all $x, y \in R_\infty$ where $f(x) = {}^{x}/(1 + |x|)$, when $-\infty < x > \infty,\ f(x) = 1, when\ x = \infty\ or\ f(x) = -1,\ when\ x = -\infty$. Show that $(R_{\infty,} d)$ is a bounded metric space. 10

माना R_∞ वास्तविक संख्याओं का प्रसारित समुच्चय है। $x, y \in R_\infty$ के सभी मानो के लिए, d इस प्रकार से

परिभाषित है $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ जहां $f(x) = x/(1+|x|)$, जब $-\infty < x > \infty, f(x) = 1,$ जब $x = \infty$ or $f(x) = -1,$ जब $x = -\infty$ है।. सिद्ध करो कि $(R_{\infty,}d)$ एक बद्ध दूरीक समष्टि है ।

4. (a) Let (X, d) be a complete metric space and Y be a subspace of X. Show that Y is complete if and only if it is closed in (X, d). 10

माना (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा Y एक उप समष्टि X का है। सिद्ध करो Y पूर्ण है यदि और केवल यदि (X, d) में बंद है।

(b) Let *G* be a region and suppose that $f: G \rightarrow ¢$ is analytic such that *f(G)* is a subset of circle. Then show that *f* is constant. 10

माना *G* एक क्षेत्र है तथा $f: G \rightarrow ¢$ वैश्लेषिक फलन इस तरह से है कि *f(G)* वृत का उपसमुच्चय है । तब सिद्ध करो कि *f* स्थिरांक है।

5. (a) Solve partial differential equation 10

$$(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy \; where \; p = \frac{\partial z}{\partial x} \; and \; q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy \text{ जहां } p = \frac{\partial z}{\partial x} \; and \; q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

(b) Using Monge's method, solve wave equation $r = a^2 t, (a > 0) \; where \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \; and \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 10

मोंग विधि का प्रयोग करके, तरंग समीकरण $r = a^2 t, (a > 0)$ जहां $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ तथा $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ है, को हल कीजिए।

6. (a) Is the Jacobi condition is fulfilled for the extremal of the functional 10

$$\int_0^a \left(y'^2 - 4y^2 - e^{-x^2}\right) dx, a \neq \frac{n\pi}{2}$$

with fixed boundaries A (0,0) and B(a, 0)? (where $y' = dy/dx$)

क्या नियत सीमाओं A(0,0) and B(a, 0) वाले फलनीय $\int_0^a \left(y'^2 - 4y^2 - e^{-x^2}\right) dx,\ a \neq \frac{n\pi}{2}$ के एक्सट्रीमल के लिए जकोवी कि शर्त मान्य है।

(b) Using Eular's method, solve the initial value problem 10

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1,$$

in the interval $0 \leq t \leq 0.5$ *with* $h = 0.1$. *If the exact solution is* $y = -\frac{9}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{19}{16}e^{4t}$, then compute the error and the percentage error.

यूलर विधि का प्रयोग करके, आरंभिक मान समस्या $\frac{dy}{dt} = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1,$ को अंतराल $0 \leq t \leq 0.5$ में, $h = 0.1$ के साथ हल कीजिए। यदि $y = -\frac{9}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{19}{16}e^{4t}$, तब त्रुटि तथा त्रुटि प्रतिशत को ज्ञात कीजिए।

7 (a) If $C(t) = \int_t^\infty \frac{\cos x}{x}$dx, then show that the Laplace transform of C(t) is $\log \frac{s^2+1}{2s}$ where s is the parameter of Laplace transform. 10

यदि $C(t) = \int_t^\infty \frac{\cos x}{x}$dx, तब सिद्ध करो कि C(t) **का** लाप्लस रूपांतरण $\log \frac{s^2+1}{2s}$ है जहां s लाप्लस रूपांतरण का प्राचल है।

(b) Write algorithm of Bisection method for finding a rea root of the equation f(x)=0 which lies in the interval [a, b]. Further, develop simple program in C language for finding a real root of the equation $x^3 - 2x - 1 = 0$ using Bisection method. 10

समीकरण f(x)=0 के वास्तविक मूल, जोकि अंतराल [a, b] में है, को ज्ञात करने के लिए बाईसेक्शन विधि का एल्गोरिदम लिखो। समीकरण $x^3 - 2x - 1 = 0$ का मूल बाईसेक्शन विधि से निकालने के लिए C-भाषा में प्रोगाम लिखो।

8 (a) Let C be the unit circle $z = e^{i\theta}, (-\pi \le \theta \le \pi)$. First show that for any real constant a, 10

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$$

Then write this integral in terms of θ to derive the integration formula

$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta) d\theta = \pi$

माना C एक एकक वृत $z = e^{i\theta}, (-\pi \le \theta \le \pi)$ है। कोई वास्तविक स्थिरांक a के लिए, सिद्ध करो $\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$. तब समाकल को θ के पदों में लिखकर निम्न समाकल सूत्र स्थापित करो

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)d\theta = \pi$$

(b) Let f and g be integrable functions on [a, b]. Then, show that 10

(i) $f.g\ is\ integrable\ on\ [a,b],$

(ii) $\max(f,g) and \min(f,g)\ are\ integrable\ on\ [a,b]$

माना f तथा g , [a, b] मे समाकलनीय फलन है। तब सिद्ध करो कि

(i) $f.g,\ [a,b]$ में समाकलनीय है।

(ii) अधिकतम (f, g) तथा न्यूनतम (f, g), [a, b] में समाकलनीय है।